代数幾何学シンポジウム記録
2006年度　pp.69-75

高次 CHOW 群とその応用
城崎、２００６年１０月２６日

THOMAS GEISSER*

1. 高次 CHOW 群

高次 Chow 群は Bloch によって１９８６年ごろに定義された. X を体 k 上の代数多様体とする. 代数幾何における標準的な単体 Δ^n を次のように定義する.

$$\Delta^n = \operatorname{Spec} k[T_0, \cdots, T_n]/(\sum t_i = 1)$$

多様体として Δ^n は n 次元 affine 空間と同じである. 境界写像 δ_i : $\Delta^{n-1} \to \Delta^n$ を

$$(x_0, \cdots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_{n-1})$$

とする. 境界写像の合成によって $m < n$ に対して定まるさまざまな閉埋め込み $\Delta^m \to \Delta^n$ を Δ^n の面と呼ぶ.

定義 1.1.

$$z_n(X, i) = \bigoplus_{x \in (X \times \Delta^i)'_{(i+n)}} \mathbb{Z}$$

を $X \times \Delta^i$ の次元 $i + n$ の既約被約閉部分多様体のうち、すべての面 $X \times \Delta^m$ と *proper* に交わるもの全体で生成される自由 *abel* 群とする.

V と W が proper に交わるという意味は、任意の $V \cap W$ の既約成分 T は次元が正しいこと, つまり, 余次元

$$\operatorname{codim} T = \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W$$

を満たすということである. 各 δ_i に対して cycle の制限写像 $\delta_i^* : z_n(X, j) \to z_n(X, j-1)$ が定義される. 引き戻しの交代和を

$$d_j = \sum (-1)^i \delta_i^* : z_n(X, j) \to z_n(X, j-1)$$

で表すと $d_{n-1} d_n = 0$ になる.

$$\cdots \xrightarrow{d_{j+1}} z_n(X, j) \xrightarrow{d_j} z_n(X, j-1) \xrightarrow{d_{j-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} z_n(X, 1) \xrightarrow{d_1} z_n(X, 0).$$

は abel 群の複体になる. この複体の j 次元の homology を $CH_n(X, j)$ で表し、X の高次 Chow 群と呼ぶ.
例：$j = 0$ の時、高次 Chow 群は一般 Chow 群と同型である

$$CH_n(X, 0) = CH_n(X).$$

例：任意の $j < -n$ および $n > \dim X$ に対して、$CH_n(X,j) = 0$.
例：X を次元 d の既約多様体とすると、$z_d(X,j) = \mathbb{Z}$ で、$d_{2j} = \mathrm{id}$, $d_{2j+1} = 0$ なので、

$$CH_d(X,i) = \begin{cases} 0 & j > 0 \\ \mathbb{Z} & j = 0. \end{cases}$$

例：X を非特異代数多様体として、$d = \dim X$ とおくと、

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = CH^{d-1}(X,1)$$

$$u \mapsto \begin{cases} (x, \frac{1}{1-u(x)}, \frac{-u(x)}{1-u(x)}) \subseteq X \times \Delta^1 & u \neq 1 \\ 0 & u = 1 \end{cases}$$

u は可逆大域切断だから、$\frac{1}{1-u(x)} \neq 0, 1$, $\frac{-u(x)}{1-u(x)} \neq 0, 1$ なので、$d_1 = \delta_0^* - \delta_1^* = 0 - 0$.

命題 1.2. $f : X \to Y$ が *proper* のとき、

$$f_* : z_n(X,j) \to z_n(Y,j)$$

$$V \to \begin{cases} [k(V) : k(f(V))] \cdot V & \dim V = \dim f(V) \\ 0 & \dim V > \dim f(V) \end{cases}$$

で定義すれば、$d_j f_* = f_* d_j$ なので、

$$f_* : CH_n(X,j) \to CH_n(Y,j)$$

が導かれる.

特に、$f : X \to k$ が proper な時、degree 写像

$$deg = f_* : z_0(X,*) \to z_0(k,*) \cong \mathbb{Z}$$

が存在する.

命題 1.3. $f : X \to Y$ が平坦で *quasi-finite* のとき、

$$f^* : z_n(Y,j) \to z_n(X,j)$$
$$V \to f^{-1}(V)$$

と定義すれば、$d_j f^* = f^* d_j$ なので、

$$f_* : CH_n(X,j) \to CH_n(Y,j)$$

が導かれる.

実際、$z_n(-,*)$ は etale 層の複体.

定理 1.4. *Localization (Bloch):* $Z \to X$ は閉埋め込みで、$U = X - Z$ は Z の開補集合とすると、次の完全系列を得る.

$$\cdots \to CH_n(Z,j) \xrightarrow{i_*} CH_n(X,j) \xrightarrow{j^*} CH_n(U,j) \to CH_n(Z,j-1) \to \cdots.$$

複体の完全系列が存在して

$$0 \to z_n(Z,*) \xrightarrow{i_*} z_n(X,*) \to z_n(U,*) \xrightarrow{j^*} C \to 0$$

C は acyclic（homology を持たない複体）であることを示せばよい。それは moving lemma という深い定理。

系 1.5. 任意の X に対して，
a) 高次 *Chow* 群はその複体の *Zariski-cohomology* と同型.

$$CH_n(X,j) \xrightarrow{\sim} H^{-j}(X_{\mathrm{Zar}}, z_n(-,*)).$$

b) 次の *spectral* 系列が存在する

$$E^1_{s,t} = \bigoplus_{x \in X_{(s)}} CH_{n-s}(k(x), s+t) \Rightarrow CH_n(X, s+t).$$

それは局所大域原理と見做せる．この系で、体の高次 Chow 群の制御が重大だと分かる．
$j=-n$ の時、$z_{-n}(k,n)$ は $\dim = 0$、つまり閉点で生成されるから、扱いは普段より簡単.

定理 1.6. *(Totaro, Nesterenko-Suslin)* 次の同型が存在する

$$K_n^M(k) \cong CH_{-n}(k,n)$$
$$\{u_1,\ldots,u_n\} \mapsto \left(\frac{-u_1}{1-\sum u_i},\ldots,\frac{-u_n}{1-\sum u_i},\frac{1}{1-\sum u_i}\right) \in \Delta^n_k.$$

ここで $K_n^M(k)$ は Milnor K 群

定義 1.7. $K_0^M(k) = \mathbb{Z}$, $K_1(k) = k^\times$, $n \geq 2$ の時

$$K_*^M(k) = T_* k^\times / \langle a \otimes (1-a) | a \in k - \{0,1\} \rangle.$$

(Steinberg 関係式*)*. ここでは、*abel* 群 A に対して、T_*A は A における *tensor* 代数.

定理 1.8. *(Bloch-Lichtenbaum, Grayson-Suslin, Levine)* 任意の X に対して、次の *spectral* 系列が存在する

$$E^2_{s,t} = CH_{-t}(X, s+t) \Rightarrow K'_{s+t}(X).$$

(Atiyah-Hirzebruch 系列の類似と見做される*)*.

予想 1.9. *(Beilinson-Soule)* 任意の $i > 2(d-n)$ に対して、

$$CH_n(X,i) = 0.$$

2. 双対性

kを標数が0の閉体として、高次Chow複体をetale層の複体と見做す.

定理 2.1. Xがk上非特異ならば、

$$z_n(-,*)\otimes\mathbb{Z}/m\cong\mu_m^{\otimes d-n}[2d-2n]$$

一般に、Voevodskyがmotivic複体という複体$\mathbb{Z}(n)$を定義して、任意のXに対して

$$\mathbb{Z}/m(n)\cong\mu_m^{\otimes n}$$

で、Xが滑らかな時、

$$z_n(-,*)=\mathbb{Z}(d-n)[2d-2n].$$

定理 2.2. *(古典的な双対性, Grothendieck)* Xを閉体k上非特異で、次元dの代数多様体として、$\mathcal{F}$をX上の局所的*constant*な*etale*層で、$m\mathcal{F}=0$とする. $\mathcal{F}^\wedge=\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mu_m^{\otimes d})$とおく. その時、有限群の完全な*pairing*

$$H_c^i(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\times H^{2d-i}(X_{\text{ét}},\mathcal{F}^\wedge)\to\mathbb{Z}/m.$$

が存在する.

証明する為に、先ず任意の$f:X\to k$上に対し、compact台順像cohomology $Rf_!-$の右随伴関手$Rf^!$が存在して、

$$\mathrm{Hom}_{k,\mathbb{Z}/m}(Rf_!\mathcal{F},\mathcal{G})\cong\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F},Rf^!\mathcal{G})$$

なので、

$$\mathrm{Hom}(H_c^i(X_{\text{ét}},\mathcal{F}),\mathbb{Z}/m)\cong\mathrm{Ext}^{-i}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F},Rf^!\mathbb{Z}/m)\cong\mathrm{Ext}^{2d-i}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F},\mu_m^{\otimes d})$$

を得る. 二つ目の同型は

$$Rf^!\mathbb{Z}/m\cong\mu_m^{\otimes d}[2d]$$

による(それは証明の一番難しい部分). 結局$\mathcal{F}$が局所的constantによって、任意の$i>0$に対して、$\mathcal{E}xt^i_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F},\mu_m^{\otimes d})=0$だから、spectral系列

$$H^s(X_{\text{ét}},\mathcal{E}xt^t_{\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F},\mu_m^{\otimes d}))\Rightarrow\mathrm{Ext}^{s+t}_{\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F},\mu_m^{\otimes d})$$

が退化して、定理が従う.

それを、任意のXに一般化したい.
etale層の複体

$$\mathbb{D}=z_0(-,*)$$

を定義する. これから、kを標数が0の閉体として、Xをk上の(任意の)代数多様体とする.

定理 2.3. *(Suslin)* 有限群の完全 *pairing*

$$H^i_c(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/m) \times CH_0(X, i, \mathbb{Z}/m) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

が存在する.

有限係数の高次 chow 群 $CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m)$ の定義は、複体

$$\cdots z_n(X, i) \otimes \mathbb{Z}/m \xrightarrow{d_i} z_n(X, i-1) \otimes \mathbb{Z}/m \cdots$$

の homology. ここでは、$z_n(X, j)$ が自由群であることを使っている. 一般に、導来 tensor 積を使う. 長完全系列

$$\cdots CH_n(X, i) \xrightarrow{\times m} CH_n(X, i) \to CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m) \to CH_n(X, i-1) \cdots$$

が存在して、特に、短完全系列

$$0 \to CH_n(X, i)/m \to CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m) \to {}_mCH_n(X, i-1) \to 0$$

を得る. それを使って、$CH_n(X, i)$ は、一意可除部分を除いて、$CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m)$ から復元できる。

系 2.4. *(G.) a)* 高次 *Chow* 群から、$\mathbb{D}$ の *etale-cohomology* への標準準同型

$$CH_0(X, i) \xrightarrow{\sim} H^{-i}(X_{\text{ét}}, \mathbb{D}).$$

は同型.

b) X を *proper* とすると、*etale* 層の複体の間の標準な *trace* 写像

$$tr : \mathbb{D} \to \mathbb{Z}$$

が存在する.

a) は、"Beilinson-Lichtenbaum 予想" の特別の場合（$n = d$, k が閉体).

定理 2.5. *(G.)* $\mathcal{F}$ を X 上の *constructible etale* 層とすると、有限群の完全 *pairing*

$$H^i_c(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^{1-i}_X(\mathcal{F}, \mathbb{D}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

が存在する.

Grothendieck の定理 2.2 が定理 2.1 によって定理 2.5 に含まれている：

$$\mathrm{Ext}^{1-i}_X(\mathcal{F}, \mathbb{D}) \cong \mathrm{Ext}^{-i}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F}, \mathbb{D}/m) \cong \mathrm{Ext}^{-i}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d}[2d]).$$

X の次元が 1 のとき、定理 2.5 は Deninger の結果で、X の次元が 2 のとき、定理 2.5 は Spiess の結果.

系 2.6. $f : X \to Y$ とする.

a) 任意の局所的 *constant* な *torsion* 層 $\mathcal{F}$ に対して、

$$\mathbb{D} \otimes f^*\mathcal{F} \cong Rf^!(\mathbb{D} \otimes \mathcal{F}).$$

b) 任意の *torsion* 層 $\mathcal{F}$ と有限生成な局所的 *constant* 層 $\mathcal{G}$ に対して、

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathbb{D} \otimes f^*\mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_Y(Rf_!\mathcal{F}, \mathbb{D} \otimes \mathcal{G}).$$

3. 基本群

基本群 $\pi_1^{ab}(X)/m$ は X の次数が m の被覆空間の自己同型群. $k=\mathbb{C}$ のとき、位相的な $\pi_1^{ab}(X(\mathbb{C}))/m$ と同型.
X が proper のとき、

$$\pi_1^{ab}(X)/m := Hom(H^1(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/m),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = CH_0(X,1,\mathbb{Z}/m).$$

つまり、abel 化された基本群が高次 Chow 群で表され, 係数系列によって、

$$0 \to CH_0(X,1)/m \to \pi_1^{ab}(X)/m \to {}_mCH_0(X) \to 0.$$

同型 $\pi_1^{ab}(X)/m \cong CH_0(X,1,\mathbb{Z}/m)$ は Hurewicz の定理の類似と見做される：abel 化された基本群は homology 群と同型.

4. Rojtman の定理

定理 4.1. *(Abel-Jacobi) C を複素数体上の非特異射影直線として、*

$$Jac_C = H^0(C,\Omega^1)^\wedge/H_1(C,\mathbb{Z})$$

とする. Chow 群の $deg=0$ 部分群は Jac_C で表される.

$$\rho : CH_0(C)^0 \xrightarrow{\sim} Jac_C$$
$$\sum_i n_i x_i \mapsto (\omega \mapsto \sum_i n_i \int_0^{x_i} \omega).$$

X を閉体上の proper 多様体として、X の閉点 x を固定する. そのとき、X から abel 多様体への写像の普遍な対象が存在して、つまり Alb_X は始対象. その多様体を Albanese 多様体とよび、$f_x : X \to Alb_X$ と書く. $f_x : X \to Alb_X$ は一意の同型を除いて一意.

補題 4.2. *Albanese 写像、*

$$S : CH_0(X)^0 \to Alb_X(k)$$
$$\sum_i n_i x_i \mapsto \sum_i n_i f_x(x_i)$$

は x の取りかたによらない.

他の点 $y \in X$ を選ぶと、$f_y = f_x - f_x(y)$ なので、

$$\sum_i n_i f_y(x_i) = \sum_i n_i f_x(x_i) - (\sum_i n_i) f_x(y) = \sum_i n_i f_x(x_i).$$

Abel-Jacobi 定理の一般化について、Mumford(1966) は複素数体上の反例を与えた. 具体的に、X は種数が零でない曲面をとると、Albanese 写像の核は巨大だる.

定理 4.3. *(Rojtman, Bloch, G.)* X を正規で *proper* な代数多様体とする．そのとき、*Albanese* 写像が *torsion* 部分群の同型を誘導する．

$$Alb : {}_{\mathrm{tor}}CH_0(X) \xrightarrow{\sim} {}_{\mathrm{tor}}Alb_X(k).$$
$$\sum_i n_i x_i \mapsto \sum_i n_i f_x(x_i)$$

証明は X が非特異の時、Rojtman と Bloch の定理、正規の場合に著者によって拡張.
次元について帰納法を使って、S は l^n-torsion 部分群で全射．次元が１のとき、正規な曲線は滑らかで、Abel-Jacobi 定理によって S は同型.

$$\begin{tikzcd}
CH_0(X,1)/m \arrow[r] & CH_0(X,1,\mathbb{Z}/m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {}_mCH_0(X) \arrow[d, "s"] \\
& H^1(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/m)^* \arrow[r, equal] & {}_mAlb_X(k)
\end{tikzcd}$$

下の同型は、

$$H^1(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/m)^* \cong \mathrm{Hom}(\mu_m, {}_m\,\mathrm{Pic}_X)^*$$

で、極限をとると、それは Cartier-西双対性によって

$$\mathrm{Hom}(\mu_m, {}_mPic^0_X)^* \cong \mathrm{Hom}({}_mAlb_X, \mathbb{Z}/m)^* = {}_mAlb_X$$

と同型になる．この図式によって、S は同型で、

$$CH_0(X,1)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$$

を得る．それは、先に斎藤秀司さんに、Weil 予想を使って証明された．
任意の X に対して、Chevalley の定理によって、

$$0 \to L \to Pic^0_X \to A \to 0$$

の分解が存在する．ここでは L は affine で、A は abel 多様体．$\chi(T) = \mathrm{Hom}(T,\mathbb{G}_m)$、$T$ の指標群とおいて、A^t を A の双対 abel 多様体とおくと、

$$0 \to {}_{\mathrm{tor}}A^t \to CH_0(X,1,\mathbb{Q}/Z) \to \chi(T)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

を得る．